Transformation de Fourier et Produit de convolution

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue, on note par:

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \{ f : \text{mesurable} / \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty \}$$

et on notera par : $\|\cdot\|_p$ la mesure d'ordre p sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$; $p \geq 1$ tq:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et si $p = \infty$, on notera par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

* Exp: Si $p = 1$; $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$

Si $p = 2$; $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

* Définition: soit f et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on dit que f et g sont convolables si $\int_{\mathbb{R}} f(x) g(y-x) dx$ existe et finie, on l'appelle dans ce cas le produit de convolution de f et g et on note par: $f * g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(y-x) dx$

* Proposition: ⊛ soit f et g deux fcts convolable alors: $f * g(x) = g * f(x)$

Preuve: il suffit de faire un ChV : $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt$ $\quad x = x - t$

⊛ soit $C_0(\mathbb{R}) = \{ f \text{ continue} / \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \}$

• si $f \in C_0(\mathbb{R}) \Rightarrow \sup |f(x)| < +\infty$

* Proposition: $L^1(f) = \{ f \text{ mesurable} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty \}$ c'est $|f|$ supp intégrable

soit $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors : $f * g$ est définie

(ou en d'autre terme f et g sont convolable)

Preuve : $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x-t) dt$

Scanné avec CamScanner

Si $f \in C_0(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ c-à-d $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$

$\int f(t) g(x-t)\,dt$

$\Rightarrow |f * g(x)| \leq M \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\,dt \leq M \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx < M \|g\|_1 < +\infty$

d'où f et g sont convolable.

Transformation de Fourier

Définition : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; on appelle transformation de Fourier l'opérateur : $F : L^1 \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$

$$f \longmapsto Ff(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t}\,dt = \hat{f}(x)$$

Théorème de Riemann Lebesgue :

C-à-d : $\lim_{x \to \pm\infty} Ff(x) = 0$ et que Ff est continue sur $\mathbb{R}$ (voir l'ex)

- on a $\begin{cases} f \text{ est dans le plan temporel} \\ Ff \text{ est dans le plan fréquentiel} \end{cases}$

- si $f \in L^1(\mathbb{R})$, f est paire (fonction cosinus)

$$Ff(x) = 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi x t) f(t)\,dt = F_c f(x)$$

- si $f \in L^1(\mathbb{R})$, f est impaire

$$Ff(x) = 2i \int_0^{\infty} \sin(2\pi x t) f(t)\,dt$$

Proposition :

soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors on a : $F(f*g) = Ff(x) \cdot Fg(x)$

preuve : $\left(Fh(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} h(t)\,dt \; ; \; f*g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(t-y)\,dy \right)$

- $F(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(t) e^{-2i\pi x t}\,dt \overset{(**)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(t-y)\,dy\, e^{-2i\pi x t}\,dt$

or on a : $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y) g(t-y) e^{-2i\pi x t}|\,dy\,dt = \iint_{\mathbb{R}\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(t-y)|\,dy\,dt$

or $|f(y)|\,|g(t-y)|$ est mesurable, positive donc d'après Tonelli d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(t-y)|\,dy\,dt \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(t-y)\,dt \right) |f(y)|\,dy$$

or on a $\int_{\mathbb{R}} |g(t-y)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx = \|g\|_1$ $\quad (x = t-y) \; (dx = dt)$ (2)

or $g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \|g\|_1 < \infty$

Scanné avec CamScanner

$= \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty$ conclusion : $\iint |f(y)\,g(t-y)\,e^{-2i\pi xt}|\,dy\,dt < +\infty$

d'où on peut appliquer th de Fubini dans la relation (**)

$$\mathcal{F}(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(t-y)\,e^{-2i\pi xt}\,dy\,dt$$

soit le chV $x = t-y \Rightarrow t = x+y$, $dx = dt$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x)\,e^{-2i\pi a(x+y)}\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,e^{-2i\pi ay}\,dy \int_{\mathbb{R}} g(x)\,e^{-2i\pi xt}\,dx$$

$$= \mathcal{F}(f)(x)\,\mathcal{F}(g)(x)$$

Transformation de Fourier inverse :

Définition : soit $f \in L^2(\mathbb{R})$

on définit la transformation de Fourier inverse de f par $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{2i\pi xt}\,dt$

$= \mathcal{F}f(-x)$

$= \check{\mathcal{F}}f(x)$

Propriété : soit $f \in L^1$ et $\mathcal{F}f \in L^1$

1) $\mathcal{F}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}\circ\mathcal{F}f(x) = f(-x) = \check{f}(x)$

2) $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}f(x) = f(x) = \mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}f(x)$

Théorème de Parseval :

soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors on a : 1) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)\,\overline{\mathcal{F}g}(x)\,dx$

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathcal{F}g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)\,g(x)\,dx$

Théorème de Plancherel :

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(a)|^2\,dx = \|\mathcal{F}f\|_2^2$$

Propriétés : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ et $\tau_a f(y) = f(y-a)$

1. $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) =$
2. $\mathcal{F}[f(a\cdot t)](x) =$

Scanné avec CamScanner

Proposition :

- 1- Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(x) = (2i\pi x)^n \mathcal{F}f(x)$$

- 2- Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $t \longmapsto t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a

$$\mathcal{F}^{(n)}(f)(x) = (-2i\pi)^n \mathcal{F}(t^n f(t))(x)$$

Exercice :

- 1- Soit $f(x) = e^{-ax^2}$ $a > 0$; $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
  - a- Ma $f_a \in L^1(\mathbb{R})$
  - b- Retrouver une equation differentielle vérifie par f_a de premier ordre noté (E)
  - c- Retrouver l'equation differentielle verifie par $\mathcal{F}f$ noté (E')
  - d- Retrouver $\mathcal{F}f$?
- 2- Soit $u(x) = e^{-\pi x^2}$ et $v(x) = \pi x e^{-\pi x^2}$, Mq u et v sont deux vecteurs propres à préciser par l'operateur F'.

Reponse :

- 1- a- on a $\int_{\mathbb{R}} |f_a(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} < +\infty \ \forall a > 0$ $\Big\} \Rightarrow f_a \in L^1(\mathbb{R})$

f_a continue sur $\mathbb{R}$, $a > 0$

- b- on a f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$f_a'(x) = -2ax e^{-ax^2} = -2ax f_a(x)$$

$$\Rightarrow (E) : f_a'(x) + 2ax f_a(x) = 0$$

- c- En appliquant l'operateur F à l'eq (E) on obtient :

$$F(f_a')(x) + 2a F(t f(t))(x) = F(0) = C$$

Scanné avec CamScanner

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(x) = (2i\pi x)^n \mathcal{F}f(x)$$

$$\frac{d^n \mathcal{F}f(x)}{dx^n} = \mathcal{F}^{(n)}(f)(x) = (-2i\pi)^n \mathcal{F}(t^n f(t))(x)$$

$$\Rightarrow 2i\pi x \mathcal{F}f(x) + \frac{2a}{-2i\pi} \mathcal{F}'(f)(x) = 0$$

$$\Rightarrow (\hat{E}) : \mathcal{F}'(f)(x) + \frac{2\pi^2}{a} x \, \mathcal{F}f(x) = 0$$

- d - $Y'(x) + B(x)Y(x) = 0 \Rightarrow \frac{Y'(x)}{Y(x)} = -B(x)$

En appliquant $\int$: $\text{Log}(Y)(x) = -\int B(x)\,dx + c$

En appliquant exp :

on a $\frac{\mathcal{F}'f(x)}{\mathcal{F}f(x)} = -\frac{2\pi^2 x}{a} \Rightarrow \mathcal{F}f(x) = \lambda e^{-\frac{\pi^2 x^2}{a}}$

on a $\mathcal{F}f(0) = \lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi 0 t} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt$

$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (donnée)

Soit $\mathcal{F}f_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$ (*)

Soit $u(x) = e^{-\pi x^2}$??

$\mathcal{F}(u)(x) = \alpha u(x)$

on a $\mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(x) = e^{-\pi x^2}$ pour $a = \pi$ dans (*)

$(f_a(x) = e^{-ax^2})$

donc $u(x) = e^{-\pi x^2}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha = 1$ pour l'opérateur $\mathcal{F}$.

(+) $v(x) = \pi x e^{-\pi x^2} = -\frac{u'(x)}{2}$

$$\mathcal{F}(v)(x) = -\frac{\mathcal{F}(u')(x)}{2} = -\frac{2i\pi x}{2} \mathcal{F}(u)(x) = i \underbrace{\pi x e^{-\pi x^2}}_{v(x)}$$

donc v est un V.P associé à la V.P i pour l'opérateur $\mathcal{F}$.

Scanné avec CamScanner

Rappel: v: vecteur propre V.P
α: valeur propre v.p
T: opérateur

$$T(v) = \alpha . v$$

Exercice:

-1- Soit $f(x) = e^{-ax} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ $\quad a > 0$

-a- Mq $f \in L^1(\mathbb{R})$

-b- Calculer Ff.

-2- Retrouver Fg où $g(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-ax} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

Réponse:

-1-a- $f(x) = e^{-ax} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} < +\infty$$ D'où $f \in L^1(\mathbb{R})$

-b- $$Ff(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-2i\pi x t}\,dt = \frac{1}{a + 2i\pi x}$$

$$F(t^n f^{(n)}) = \frac{1}{(-2i\pi)^n} F^{(n)} f(x)$$

-2- $$Fg(x) = \frac{1}{k!} F(t^k f(t))(x)$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{1}{(-2i\pi)^k} F^{(k)}(f)(x)$$

or $$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{2i\pi x + a}\right) = \frac{(-1)^k (2i\pi)^k (k-1)!}{(2i\pi x + a)^{k+1}}$$

Donc $$Fg(x) = \frac{(k-1)!}{(k-1)!(2i\pi x + a)^{k+1}}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-a)^n (n-1)!}{(ax+b)^{n+1}}$$

Ex:

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tq $Ff(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

Calculer Fg et Fh où $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

et $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Scanné avec CamScanner

$\mathcal{F}(f(\cdot-1)) \neq \mathcal{F}f(\cdot-1)(x)$

Reponse :

- $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} = f(x-1)$

$\mathcal{F}f(x) = e^{-2i\pi x}\,\Pi\, e^{-2\pi|x|}$

$\mathcal{F}f(t-1)(x) = e^{-2i\pi x}\,\Pi\, e^{2\pi(ix+|x|)}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

- $h(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2} \longrightarrow f'(x) = -2x\,f^2(x) \longrightarrow h(x) = \dfrac{-1}{2} f'(x)$

29/12/2023

$\mathcal{F}h(x) = \dots = -2(2i\pi x)\,\mathcal{F}f(x) = 4i\pi^2 x\, e^{-2\pi|x|}$

$\Rightarrow \mathcal{F}h(x) = -i\pi^2 x\, e^{-2\pi|x|}$

Exercice 9 :

On considère les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$; $g(x) = \sin(\pi x)\, e^{-\pi x^2}$

1. a. soit $\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$

Vq $\mathcal{F}(\chi)(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, $x > 0$

b. Calculer $\mathcal{F}f$ et en déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 dx$

2. Calculer $\mathcal{F}g$ sachant que $\mathcal{F}(\pi t\, e^{-\pi x^2})(x) = i\pi x\, e^{-\pi x^2}$

Reponse :

1. $\mathcal{F}(\chi)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi x t}\, dt = \dfrac{-1}{2i\pi x}\left[e^{-2i\pi x t}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

2. $\mathcal{F}(\chi)(x) = f(x)$

$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x)$

$\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}f(x) = -f(x)$

$\mathcal{F}\circ\mathcal{F}f(x) = f(-x) = f(x)$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \mathcal{F}f(x) = \chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$ d'après la formule d'inverse

- b - Soit $I = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\chi)(x)|^2 dx$ d'après Plancherel

$= \int_{\mathbb{R}} \chi^2(x)\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \chi^2(x)\, dx = 1$

- c -

ind: $\mathcal{F}(e^{iat} f(t))(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iat} e^{-2i\pi x t} f(t)\, dt$

$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t(x - \frac{a}{2\pi})} f(t)\, dt = \mathcal{F}f\left(x - \frac{a}{2\pi}\right)$

$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi x t}\, dt$

$a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) = \mathcal{F}f(t-a))(x) = e^{-2i\pi x a}\, \mathcal{F}f(x)$

$\mathcal{F}f(a-t)$

- d - $g(x) = \sin(\pi x)\, e^{-\pi x^2} = \frac{1}{2i} e^{i\pi x} e^{-\pi x^2} - \frac{1}{2i} e^{-i\pi x} e^{-\pi x^2}$

on a $\mathcal{F}(e^{iat}(f(t))(x) = \mathcal{F}f\left(x - \frac{a}{2\pi}\right)$

$\mathcal{F}g(x) = \frac{1}{2i} \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2i} \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d'autre part on a: $\mathcal{F}(t\, e^{-\pi t^2})(x) \overset{\text{dérivée}}{=} -\frac{1}{2} \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})'(x)$

$= -\frac{1}{2} 2i\pi x\, \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(x) = -i\pi x\, e^{-\pi x^2}$

$\Rightarrow \mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(x) = e^{-\pi x^2}$ $\Rightarrow \mathcal{F}g(x) = \frac{1}{2i} e^{-i\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2i} e^{-i\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

Scanné avec CamScanner

Exemple :

on a $\mathcal{L}(\cos(ax)\,H(x))(p) = \frac{p}{p^2+a^2} = g(p)$

on dit que $\frac{p}{p^2+a^2}$ est l'image par la transformation de Laplace de $\cos(ax)\,H(x)$ et que $\cos(ax)\,H(x)$ est l'origine $g(p)$ par $\mathcal{L}$. On encore

$$\mathcal{L}^{-1}(g)(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)(x) = \cos(ax)\,H(x)$$

Exercice :

1. Calculer la transformation de Fourier $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ; |x|<1 \\ 0 & ; \text{sinon} \end{cases}$
2. Evaluer l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

- $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi xt}\, dt$; $\mathcal{F}(\tau_a f)(u) = \mathcal{F}(f(t-a))(x) = e^{-2i\pi xa}\,\mathcal{F}f(x)$
- $\mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{x}{a}\right)$; $\mathcal{F}(f^{(k)})(x) = (2i\pi x)^k\,\mathcal{F}f(x)$

$$\frac{d^k}{dx^k}(\mathcal{F}f)(x) = (\mathcal{F}f)^{(k)}(x) = (-2i\pi)^k\,\mathcal{F}(x^k f)(x)$$

- $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$; $\mathcal{F}(f*g)(x) = \mathcal{F}f(x)\,\mathcal{F}g(x)$
- $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)\,\mathcal{F}g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$; $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{2i\pi xt}\, dt$
- $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}f(x) = \check{f}(x) = f(-x)$; $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\check{f}(x) = f(x)$
- $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$; $\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx$

Reponse :

on peut voir que $f \in L^1$ car $\int |f| < \infty$ et que f est paire donc

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}_c f(x) = 2\int_0^1 \cos(2\pi xt)\,(1-t^2)\,dt \quad ; \begin{cases} u = 1-t^2 \to u' = -2t \\ v' = \cos(2\pi xt) \to v = \frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi xt) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}f(x) = 2\left[\frac{1-t^2}{2\pi x}\sin(2\pi xt)\right]_0^1 + \frac{2}{2\pi x}\int_0^1 t\sin(2\pi xt)\,dt \quad ; \quad (=0)$$

IPP ; $u = t \longrightarrow u' = 1$

$v' = \sin(2\pi xt) \longrightarrow v = -\frac{1}{2\pi x}\cos(2\pi xt)$

Scanné avec CamScanner

$$Ff(x) = \frac{2}{\pi x}\left\{\left[\frac{-t}{2\pi x}\cos(2\pi x t)\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{2\pi x}\int_0^1 \cos(2\pi x t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{-1}{(\pi x)^2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{(\pi x)^2}\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}$$

$$\Rightarrow Ff(x) = \frac{-\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{1}{2(\pi x)^3}\sin(2\pi x)$$

2 - soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

on a $g(x) = Ff(x) = -\frac{\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{1}{2(\pi x)^3}\sin(2\pi x)$ est paire donc

① $Fg)(x) = F_c\, g(x) = 2\int_0^{+\infty} g(t)\cos(2\pi x t)\,dt$ d'une part, et d'autre part d'après la formule d'inversion : $Fg(x) = F(Ff)(x) = \tilde{f}(x) = f(-x)$

$= f(x)$ car f est paire

on a $Fg(x) = 2\int_0^{+\infty}\left\{-\frac{\cos(2\pi t)}{(\pi t)^2} + \frac{1}{2(\pi t)^3}\sin(2\pi t)\right\}\cos(2\pi x t)\,dt$

soit le CV $y = 2\pi t \Rightarrow dy = 2\pi\,dt \quad ; t = \frac{y}{2\pi}$

$$\Rightarrow Fg(x) = -2\int_0^{+\infty}\left\{\frac{\cos(y)}{\left(\frac{y}{2}\right)^2} - \frac{1}{2\left(\frac{y}{2}\right)^3}\sin(y)\right\}\cos(yx)\frac{dy}{2\pi}$$

$$= \frac{-4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\cos(y) - \sin(y)}{y^3}\cos(xy)\,dy$$

En particulier pour $x = \frac{1}{2}$; $\Rightarrow Fg\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{\pi}I = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow I = \frac{-3\pi}{16}$

Exercice :

soit $g(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2}$; Chercher l'origine de g par la transformation de Laplace

$= \frac{1}{(p+ia)^2(p-ia)^2}$; on a $g(p) = \frac{a_1}{p+ia} + \frac{a_2}{(p+ia)^2} + \frac{a_3}{p-ia} + \frac{a_4}{(p-ia)^2}$

$a_2 = (p+ia)^2 g(p)\Big|_{p=ia} = \frac{-1}{4a^2}$; $a_4 = (p-ia)^2 g(p)\Big|_{p=ia} = -\frac{1}{4a^2}$; $\lim_{p\to+\infty} pg(p) = 0 = a_1 + a_3 \Rightarrow a_1 = -a_3$

et $g(0) = \frac{1}{a^4} = \frac{a_1}{ia} + \frac{-a_2}{ia^2} - \frac{a_3}{ia} - \frac{a_4}{a^2} = \frac{2a_1}{ia} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^4} \Rightarrow a_1 = \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{2a^2}\right)\frac{ia}{2}$

Scanné avec CamScanner